

Cuadernillo de Geometría Analítica

Tercera Unidad



División de un segmento.

Comparación de dos cantidades de la misma especie

NOTA:

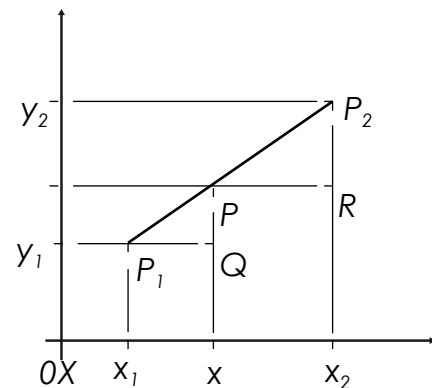
CUANTAS VECES LA UNA CONTIENE A LA OTRA.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento de recta, entonces la relación en que el punto $P(x, y)$ divide al segmento P_1P_2 en dos partes proporcionales se define como:

Por geometría, los triángulos ΔP_1PQ y ΔPP_2R son semejantes, la proporcionalidad que existe entre

sus lados es:

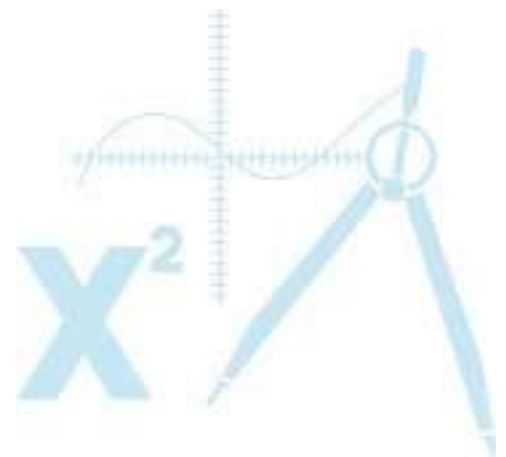
$$\frac{\overline{P_1P}}{PP_2} = \frac{\overline{P_1Q}}{PR} = \frac{\overline{QP}}{RP_2} \quad y$$



$$\begin{aligned} \overline{P_1Q} &= x - x_1, & \overline{PR} &= x_2 - x \\ \overline{QP} &= y - y_1, & \overline{RP_2} &= y_2 - y \end{aligned}$$

Entonces:

* Para determinar la razón dados los extremos y el punto de división se emplea:



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{o} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = r$$

Para encontrar el punto de división dados los extremos y la razón se utiliza:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Importante:

- Si el punto de división P está entre los puntos P_1 y P_2 la razón es positiva.
- Si el punto de división no está entre los puntos dados entonces la razón es negativa.

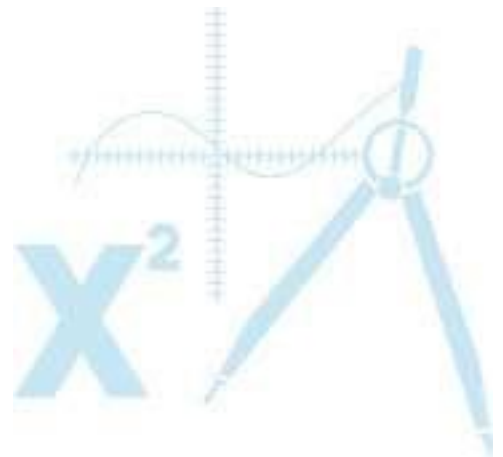
Actividad.

Determina la razón en que el punto P divide al segmento de recta de extremos P_1 y P_2 .

1.- $P_1(0, 2), P_2(-2, 4), P(2, 0)$
 $x_1, y_1 \quad x_2, y_2 \quad x, y$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{-2 - 0} = \frac{2}{-2} = -1/2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{0 + (-1/2)(-2)}{1 + (-1/2)} = \frac{1}{1/2} = 2$$



$$Y = \frac{2 + (-1/2)}{1 + (-1/2)} = \frac{1 \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3/2}{1/2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

2.- $P_1(3,5), P_2(-1,4), P(-5,3)$

3.- $P(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), P_2(2, 1), P(\frac{1}{3}, \frac{13}{18})$
 $X_1 \ Y_1 \quad X_2 \ Y_2 \quad X \quad Y$

$$R = \frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{10}$$

$$X = \frac{\frac{1}{2} + (-1/10 * 2)}{1 + (-1/10)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{-\frac{3}{10}}{-\frac{9}{10}} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

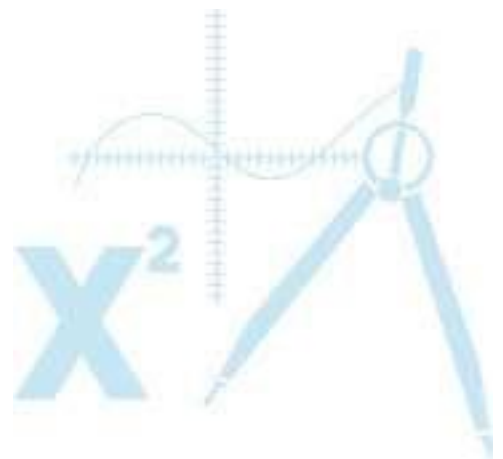
$$Y = \frac{\frac{3}{4} + (-1/10 * 1)}{-1/10 + 1} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{10}}{-\frac{9}{10}} = \frac{-\frac{26}{40}}{-\frac{9}{10}} = -\frac{13/20}{-9/10} = \frac{130}{180} = \frac{13}{18}$$

4.- $P_1(-5,1), P_2(4,3), P(-3, \frac{13}{9})$

Encuentra las coordenadas de un punto $P(x, y)$ según los elementos dados.

1.- $P_1(4, 1), P_2(5, -2), r = -2$
 $X_1 \ Y_1 \quad X_2 \ Y_2$

2.- $P_1(-2, 3), P_2(4, 5), r = \frac{2}{3}$



X **x1** **y1** **x2** **y2**

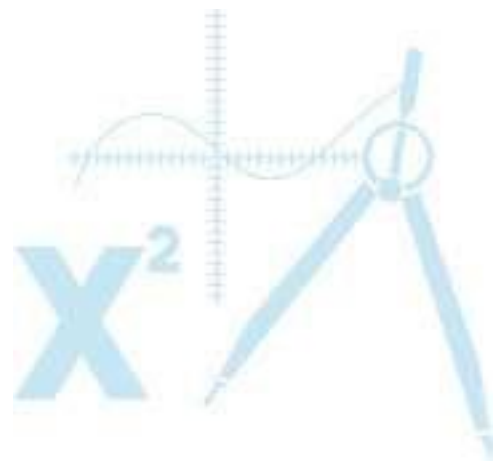
y

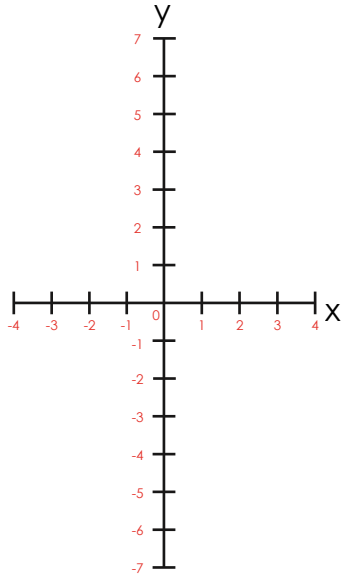
3.- $P_1(0,5), P_2(6,-1), r = 5$

4.- $P_1(0,2/3), P_2(0,4), r = \frac{1}{2}$

Gráfica y determina las coordenadas que dividen al segmento en 4 pares.

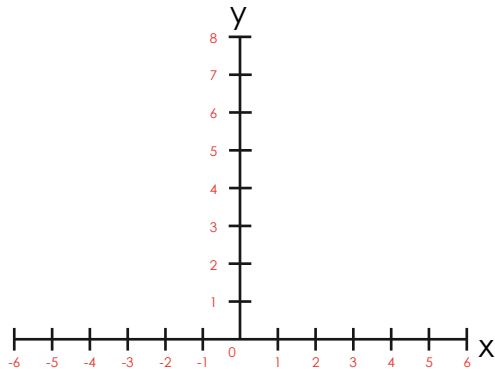
$A(-3, 2), B(1, 6)$





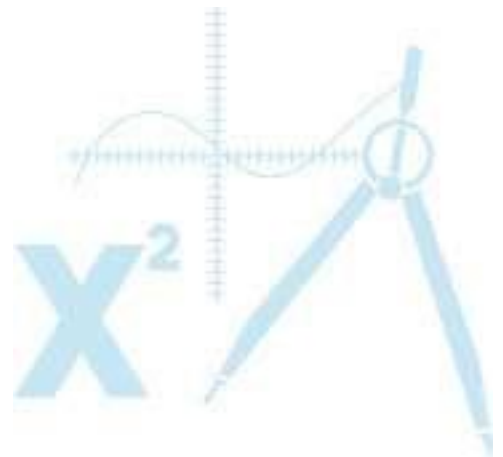
Grafica y determina las coordenadas de los puntos que dividen al segmento en 3 partes.

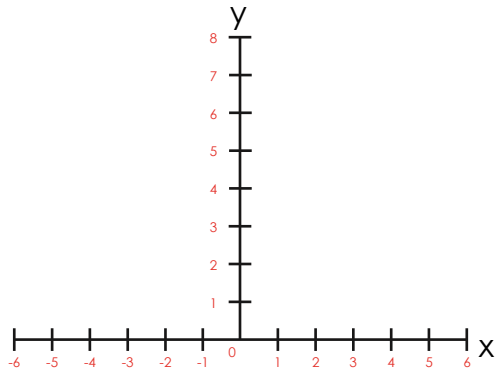
$C(4,2)$ $D(-5,7)$



Grafica y determina las coordenadas de los puntos que dividen al segmento en 5 partes.

$E(-3,2)$ $F(1, 6)$

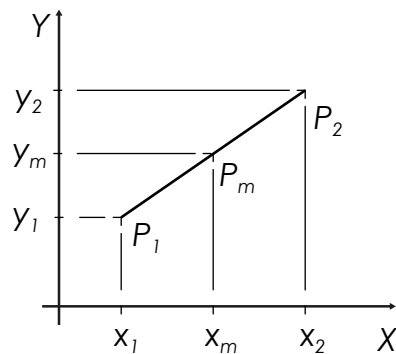






Punto medio.

El punto medio del segmento de recta, es aquel punto que lo divide en dos segmentos iguales.



Por tanto, las coordenadas del punto medio son:

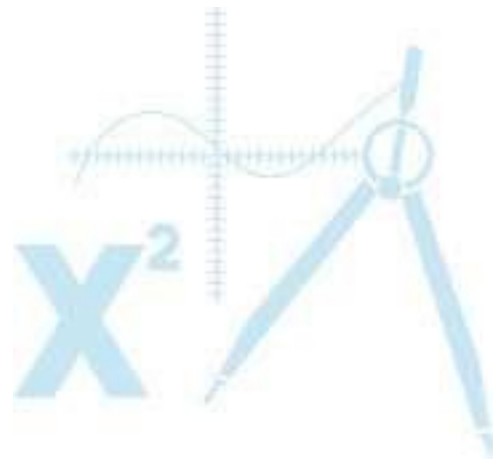
$$P_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Actividad.

Determina las coordenadas del punto medio definido por los puntos:

1.- $A(3,5), B(2,-1)$

2.- $A(0,4), B(3, 7)$



3.- $A(-1,3), B(9,11)$

4.- $A\left(\frac{5}{1}, -7\right), B\left(11, -4\right)$

5.- $A\frac{1}{2}, B\frac{3}{3}$

6.- $A\left(\frac{1}{2}, -2\right), B\left(1, \frac{1}{4}\right)$

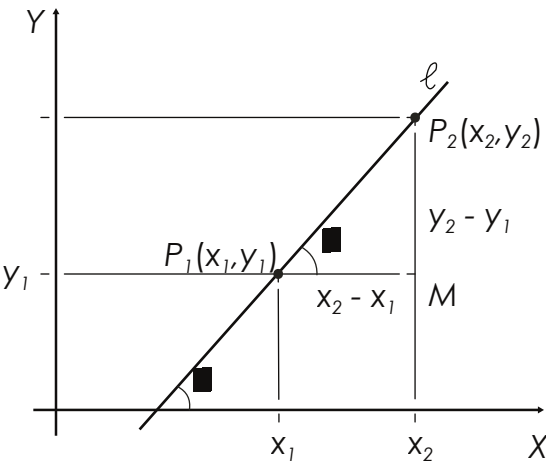
Si el punto medio de un segmento de recta es $P_m(1,-3)$ y un extremo del segmento es $P_1(7,-1)$, ¿Cuál es la coordenada del otro extremo?



Inclinación de una recta.

La inclinación de una recta es el menor de los ángulos que dicha recta forma con el semieje X positivo y se mide, desde el eje X a la recta, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Pendiente: La pendiente de una recta se define como la tangente del ángulo de inclinación y se calcula con la siguiente expresión:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



$$\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para calcular la magnitud del ángulo se despeja de la siguiente manera:

t

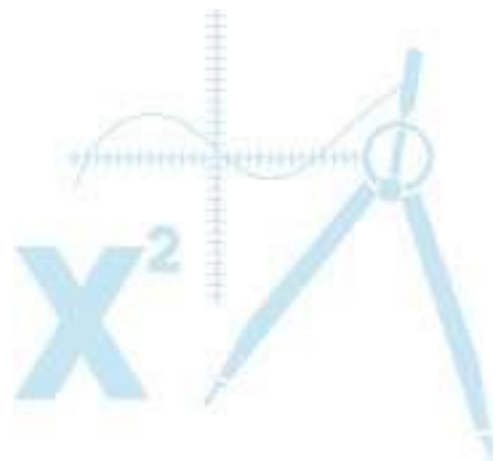
a

n

m

θ

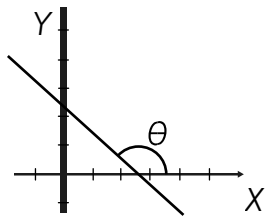
=



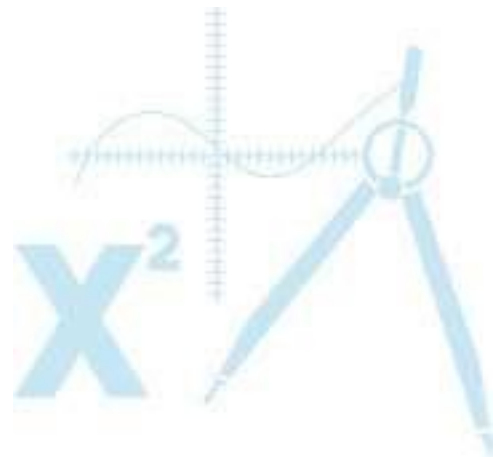
t
a
n
-
1
(
m
)

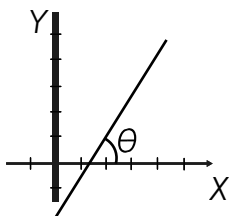
Los casos que se presentan para el valor de la pendiente y su ángulo de inclinación, son los siguientes.

Si $m > 0$ (positiva) entonces, el ángulo es agudo (menor a 90°).



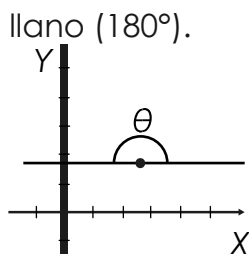
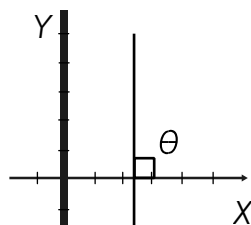
Si $m < 0$ (negativa) entonces, el ángulo es obtuso (mayor a 90° y menor a 180°).





Si $m = \frac{\ell}{0}$ entonces, el ángulo es recto (90°).

Si $m = 0$ entonces, el ángulo es



Actividad.

Determina la pendiente de los siguientes pares de puntos.

1.- A(-3,5), B(2,7)

2.- C(4,-2), D(7,-2)

3.- E(-1,2), F(4,-5)

-2 - (-2)

P1 (x1,y1) ,p2(x2, y2)

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 5}{2 - (-3)} = \frac{2}{5} = 2$$

$$\tan \theta = m$$

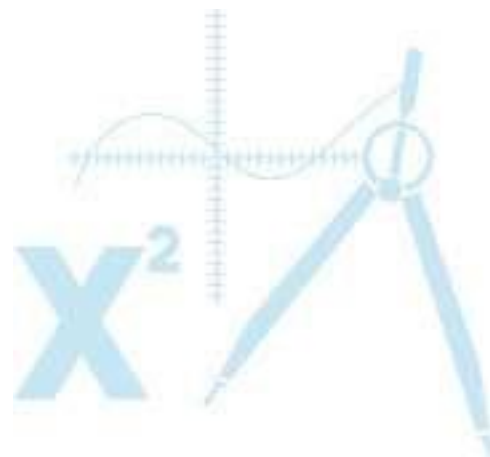
$$\theta = \tan^{-1} m$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{5}$$

$\theta = \tan^{-1}(2/5)$

5.- I(0,4), J(-3,

6.- K(-5,1), L(1,-3)



21.8

4.- $G(8,-2), H(0,-1)$

7.- $M\left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right), H(3, -\frac{1}{2})$ 8.- $O\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right), P\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right), Q\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$

9.- $Q(5, \sqrt{3}), R\left(3, -\frac{3}{2}\right)$

Encuentra la medida de los ángulos de inclinación de las rectas que pasan por los siguientes puntos.

1.- $A(5,7), B(2,4)$ 2.- $C(-1,2), D(-2,3)$ 3.- $E(7,-1), F(7, 4)$

Los vértices de un triángulo son los puntos $G(2,-2), H(-1,4), I(4,5)$.
Determina la pendiente para cada uno de sus lados.

$G(2,-2), H(-1,4)$ $H(-1,4), I(4,5)$ $I(4,5), G(2,-2)$

La pendiente de una recta es 3. Si la recta pasa por los puntos $A(2,-1)$ y el punto B , cuya ordenada es -5 , ¿Cuál es el valor de su abscisa?



Una recta tiene un ángulo de inclinación de 45° y pasa por los puntos A y B. Si el punto A tiene las coordenadas $(3, -2)$ y la ordenada de B es -1 , encuentra su abscisa.



Líneas paralelas y perpendiculares.

Si dos líneas rectas l_1 y l_2 son paralelas si sus pendientes son iguales.

$$m_1 = m_2$$

Dos líneas rectas l_1 y l_2 son perpendiculares entre sí, cuando el producto de sus pendientes es -1.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

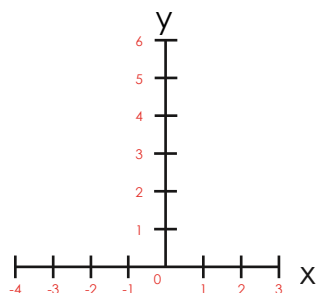
Actividad.

Demuestra si la recta l_1 que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(-6, 5)$ es paralela o perpendicular a la recta l_2 que pasa por los puntos $C(0, 2)$ y $D(-2, -1)$.

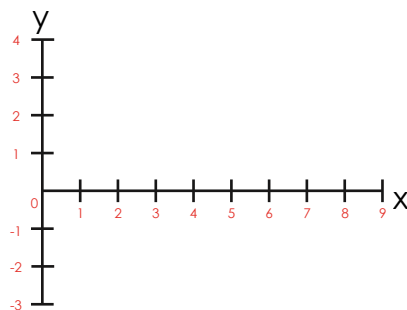
Demuestra que la recta que pasa por los puntos $A(-2, 1)$ y $B(1, -4)$, es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(8, -7)$ y $D(5, -2)$.



Demuestra que los cuatro puntos $A(-3,1)$, $B(-2,5)$, $C(2,4)$ y $D(1,0)$, son los vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares.



Demuestra por medio de pendientes, que los puntos $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(8,0)$ y $D(4, -2)$ son vértices de un paralelogramo.



Ángulo entre dos rectas.

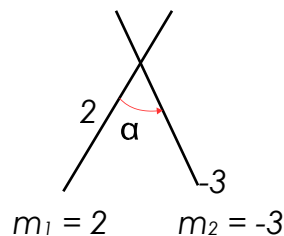
El ángulo α , medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde la recta l_1 , de pendiente m_1 a la recta l_2 de pendiente m_2 es:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right)$$

Importante:

Para la correcta obtención del ángulo formado por dos rectas es necesario hacer de manera adecuada la selección de m_1 y de m_2 , para ilustrar el procedimiento se obtendrá el valor del ángulo alfa.

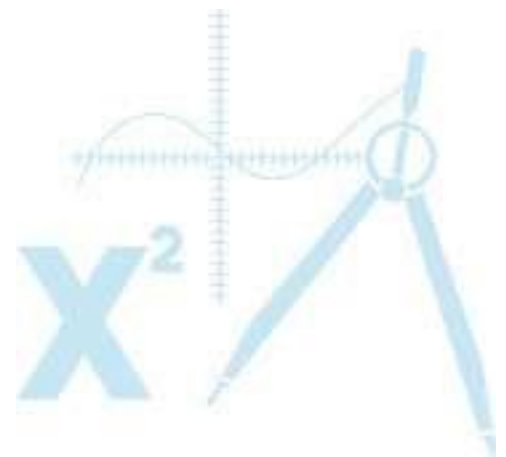
Todo ángulo se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj, por lo tanto el ángulo se mide como se indica en la figura.



$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{-3 - 2}{1 + (-3)(2)} \right) \\ \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{-5}{1 - 6} \right) \\ \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{-5}{-5} \right) \\ \alpha &= \tan^{-1} (1) = 45^\circ \end{aligned}$$

La selección de las pendientes se hará de la siguiente manera:

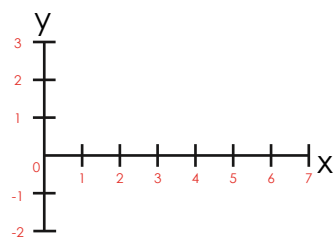
m_1 Es siempre la pendiente donde comienza el ángulo, en este caso 2, m_2 es siempre la pendiente donde termina el ángulo, por lo tanto m_2 será -3.



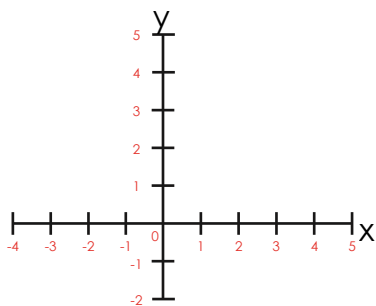
Actividad.

En los siguientes ejercicios determina los ángulos interiores de los triángulos.

1.- $A(4,2)$, $B(0,1)$, $C(6, -1)$

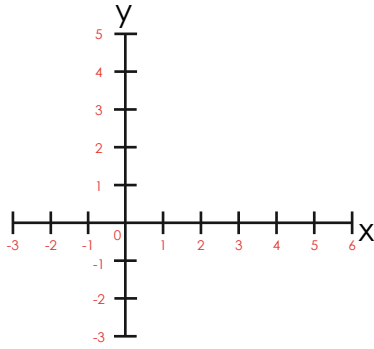


2.- $D(-3, -1)$, $E(4,4)$, $F(-2,3)$

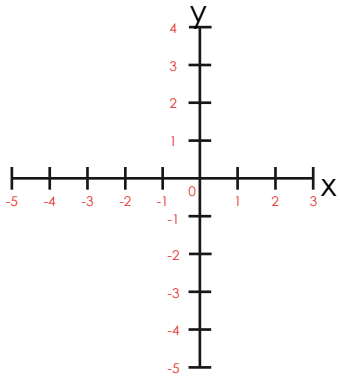


3.- $G(-2,1)$, $H(3,4)$, $I(5,-2)$

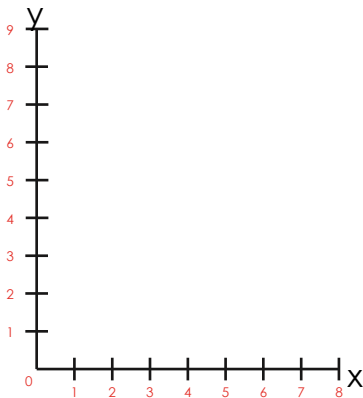




4.- $J(-4,1)$, $K(2,3)$, $L(1,-4)$



¿Cuáles son las medidas de los ángulos interiores del paralelogramo, cuyos vértices son los puntos $A(1,3)$, $B(2,6)$, $C(7,8)$, $D(6,5)$?



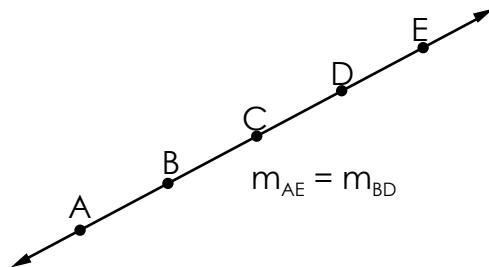
Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135° . Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -3 , determina el valor de la pendiente de la recta inicial.





Línea recta.

La línea recta es el lugar geométrico de todos los puntos, tales que al tomar dos puntos diferentes P_1 y P_2 , y obtener el valor de la pendiente, esta resulta siempre ser la misma.



Ecuación de la recta punto-pendiente de la recta.

Sea el punto A de coordenadas (x_1, y_1) y “ m ” una pendiente dada, la ecuación de la recta se puede obtener a partir del concepto de pendiente como se muestra a continuación.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$m (x - x_1) = y - y_1$$



Ecuación de la recta punto - pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Al desarrollar esta ecuación, se llega a la ecuación de la recta en su forma general, que puede ser expresada con el siguiente formato:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{Actividad.}$$

En los siguientes ejercicios determina la ecuación de la recta en su forma general, que satisfaga con las siguientes condiciones.

- 1.- $A(1, 3), m = 2$ 2.- $B(5, 3), m = -2$ 3.- $C(3, -2), m = 1$
 4.- $D(0, -5), m = -4$

X1 y1

1.- $y - y_1 = m(x - x_1) = y - 3 = 2(x - 1)$ $y - 3 = 2x - 2$ $-2x + 2 + y - 3 = 0$

- $\underline{-2x + 2y - 1 = 0}$
 2.- $y - 3 = -2(x - 5) =$ $y - 3 = -2x + 10$ $2x - 10 + y - 3 = 0$ $\underline{2x + y - 13 = 0}$

3.- $y - -2 = 1(x - 3)$ $y + 2 = x - 3$ $-x + 3 + y + 2 = 0$ $\underline{-x + y + 5 = 0}$

4.- $y + 5 = -4(x - 0)$ $y + 5 = -4x$ $\underline{4x + y + 5 = 0}$

5.- $E(2, 0), m = \frac{1}{2}$ 6.- $F(-4, 5), m = \frac{3}{2}$ 7.- $G(-1, -6), m = -\frac{5}{3}$
 8.- $H(0, 0), m = -\frac{4}{5}$



Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos de una recta. En base a estos dos puntos conocidos de una recta, es posible determinar su ecuación.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Calculando su pendiente:

Actividad.

En los siguientes ejercicios determina la ecuación de la recta que determinan los siguientes pares de puntos en su forma general.

1.- $A(0, 0), B(3, 1)$

2.- $B(0,0), C(4,3)$

3.- $D(1,1), E(4, 3)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y_1

x_2

y_2

$$x_2 - x_1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{pendiente} \quad m = 1 - 0 / 3 - 0 = 1/3$$

$$y - 0 = 1/3 (x - 0) \quad y = 1/3 x \quad -x/3 + y = 0$$

3.- $m = 3 - 1 / 4 - 1 = 2/3$

$$Y - 1 = 2/3 (x - 1) = y - 1 = \frac{2x - 2}{3} = 3(y - 1) = 2x - 2$$

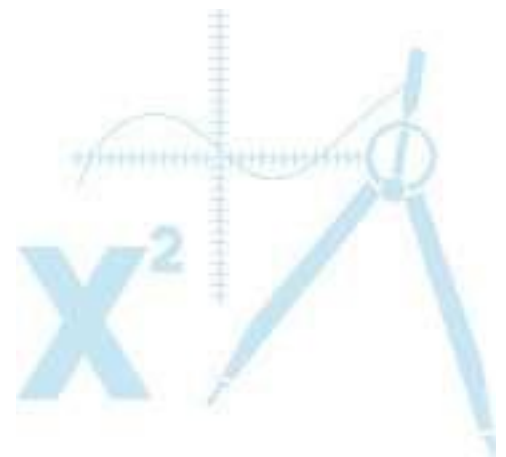
$$-1) = 2x - 2$$

3

$$-2x + 2 + 3y - 3 = 0$$

$$\underline{-2x + 3y - 1 = 0}$$

4.- $F(5,1), G(1,4)$ 5.- $H(-5,2), I(3,2)$ 6.- $J(4,1), K(-2,-5)$



6.- $m = \frac{-5 - 1}{-2 - 4} = \frac{-6}{-6} = 1$ sust $y - 1 = 1(x - 4) = x - 4$

$-x + 4 + y - 1 = 0$ $-x + y + 3 = 0$

2 4 3 4 5 5

7.- $L(5, \frac{1}{5})$, $M(-1, \frac{3}{5})$, $O(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$, $P(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

8.- Una recta pasa por el punto $A(7,8)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(-2,2)$ y $D(3,-4)$. Halla su ecuación.





Rectas perpendiculares.

Son aquellas rectas que cumplen con $m_1 \cdot m_2 = -1$

Actividad.

Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a $3x + 4y - 5 = 0$ y pasa por $D(-2, -1)$.



Demuestra que las rectas cuyas ecuaciones son $3x + 2y = 11$ y $3y + 2x = 6$ son perpendiculares.

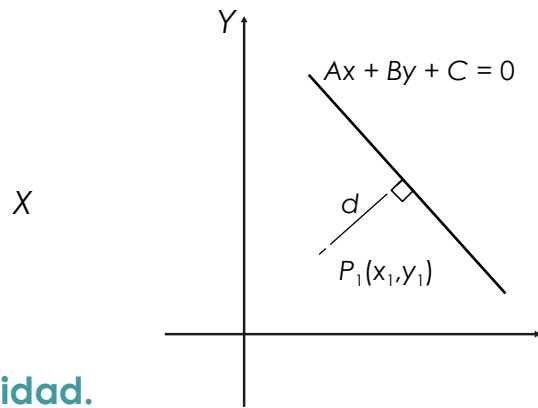
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $K(10,2)$ y es perpendicular a la recta $4x - 6y = 12$.

Distancia de un punto a una recta.

La distancia de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a una recta $Ax + By + C = 0$ esta dada por la fórmula:

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$





Actividad.

Determina la distancia del punto a la recta indicada.

1.- $P(1,4)$, $2x - 7y + 3 = 0$

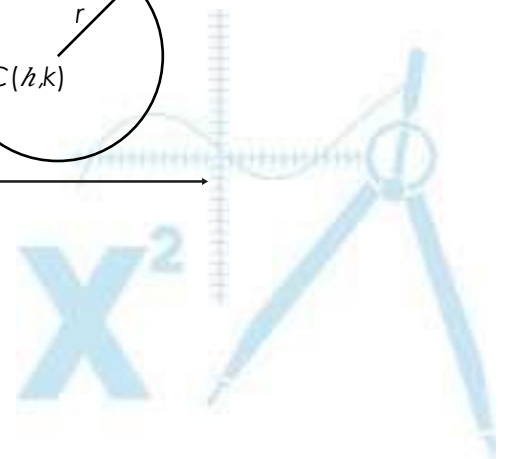
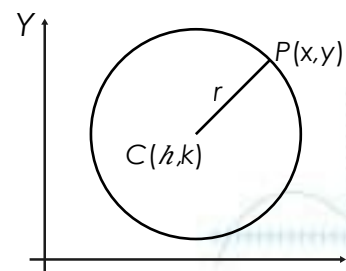
2.- $N(-2,5)$, $3x + 4y - 5 = 0$

3.- $G(-1,7)$, $12x + 5y + 26 = 0$

4.- $R(-3,-7)$, $y - 3 = 0$

Circunferencia.

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo llamado centro, siempre



es constante:

Definición:

$$d_{CP} = r \rightarrow \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Elementos:

C: centro r: radio

X P(x,y): punto cualquiera de la circunferencia

Ecuación de la circunferencia.

- **Forma canónica**

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen (0,0) y radio r, esta dada por la fórmula:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

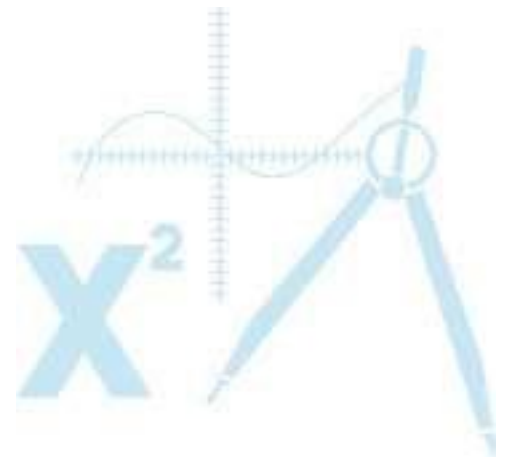
- **Forma ordinaria**

La ecuación de la circunferencia con centro en el punto C(h, k) y radio r, esta dada por la fórmula:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- **Forma general**

Esta ecuación se obtiene al desarrollar los binomios e igualar a cero la ecuación ordinaria.



$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde $A = C$ **Actividad.**

Obtén la ecuación en su forma general de la circunferencia.

- 1.- $C(0,0), r = 4$ 2.- $C(0,0), r = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 3.- $C(3,-4), r = 6$ 4.- $C(5,-3), r = \sqrt{6}$

- 5.- $C(5,-12), r = 13$ 6.- $C(-1,-6), r = 8$

Halla la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y que pasa por el punto $(6,0)$.



Halla la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $(3, -4)$ y pasa por el origen.

Halla la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $(4, -1)$ y que pasa por $(-1, 3)$.

Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro a $A(-1, 5)$ y $B(-5, -7)$.



Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(-2,3)$ que es tangente a la recta $20x - 21y - 42 = 0$.

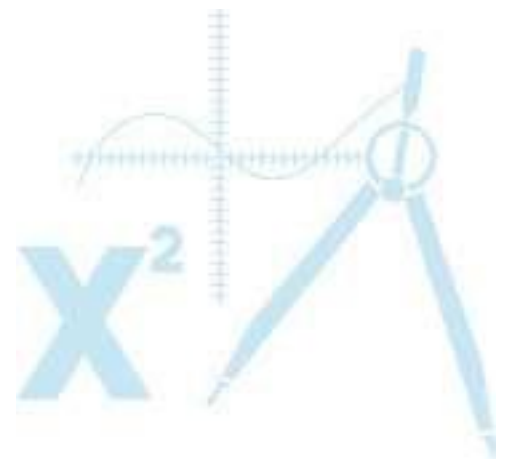
Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$

Obtención del centro y radio a partir de la ecuación general.

A partir de la ecuación general pueden determinarse las coordenadas del centro y la longitud del radio; esto se realiza completando los trinomios cuadrados y simplificando.

El siguiente ejemplo muestra el procedimiento:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$



Inicialmente se agrupan "x" y "y", el termino independiente se coloca del lado derecho.

$$x^2 - 6x + y^2 + 8y = 11$$

Ahora se completan cuadrados tanto para "x" como para "y", se suma la misma cantidad que se utiliza para completar el trinomio del lado derecho.

$$x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 + y^2 + 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 11 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

Desarrollando y simplificando:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 11 + 9 + 16$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

Una vez llegando a la ecuación canónica se obtienen las coordenadas del centro y la longitud del radio.

$$x - 3 = 0 \quad y + 4 = 0 \quad x = 3 \quad y = -4$$

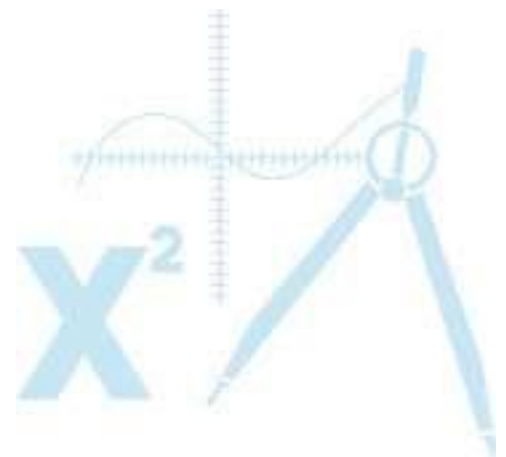
$$C(3, -4) \quad r^2 = 36$$

$$r = \sqrt{36} \quad r = 6$$

Actividad.

Encuentra las coordenadas de centro y la longitud del radio de las circunferencias siguientes.

1.- $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$



2.- $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 36 = 0$

3.- $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$

4.- $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 7 = 0$

5.- $2x^2 + 2y^2 + 12x - 2y - 3 = 0$

6.- $3x^2 + 3y^2 - 6x + 5y = 0$



Demuestra que las circunferencias $4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$ y $12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 = 0$ son concéntricas.

.- $C(-3,2)$, $V(1,2)$ y eje imaginario =

